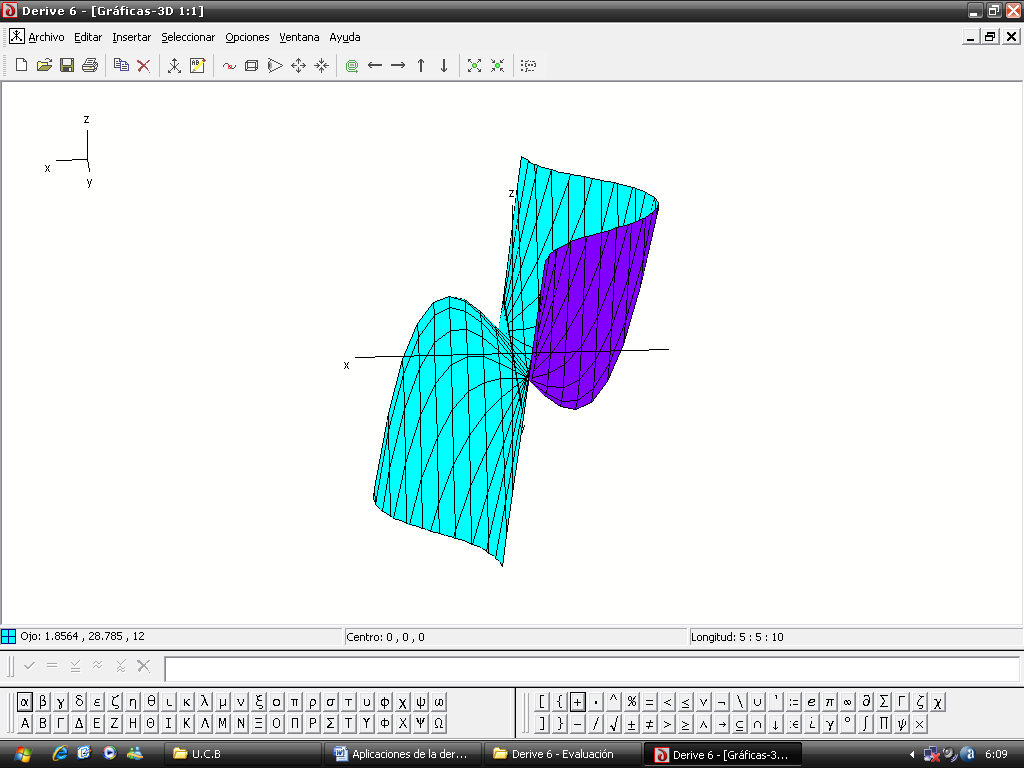
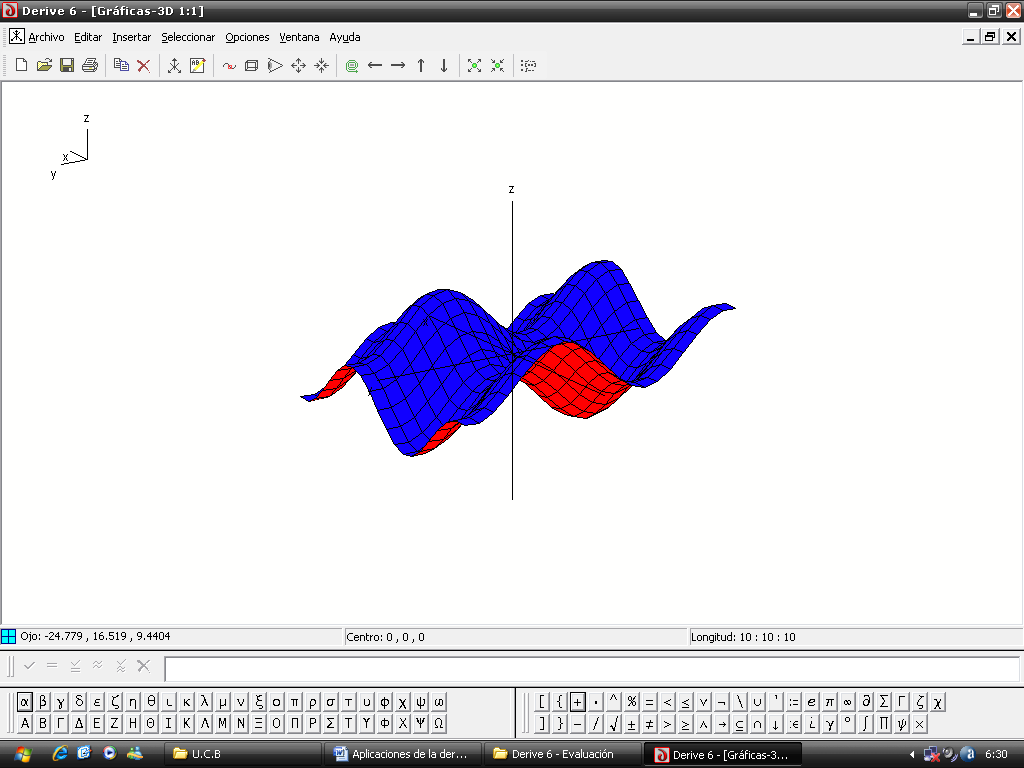
**MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES**

****

En una función de varias variables una de las aplicaciones de la derivada de primer orden y de segundo orden es determinar los valores denominados extremos relativos de una función máximos, mínimos.

**Punto Crítico**

Es un punto que pertenece al dominio de la función que esta incluido o forma parte de ese dominio D que esta en el plano xy o también estar en la borde del dominio denominado disco o frontera de dominio en la función 

El punto critico se determina igualando las derivadas parciales a cero o resolviendo el sistema obtenemos los valores de x, y que serán el punto critico de 

Una vez obtenido el punto crítico es posible clasificar estos puntos como máximos como mínimos o puntos de silla de acuerdo al criterio de la primera derivada y criterio de la segunda derivada.

**Criterio de la Primera Derivada:**

* **Máximos Relativos:** se dice que el punto critico que pertenece ala función es considerado máximo relativo si cumple con la siguiente desigualdad

****

* **Mínimos Relativos**: Se dice que la función tiene como punto mínimo el punto  si cumple con la siguiente desigualdad

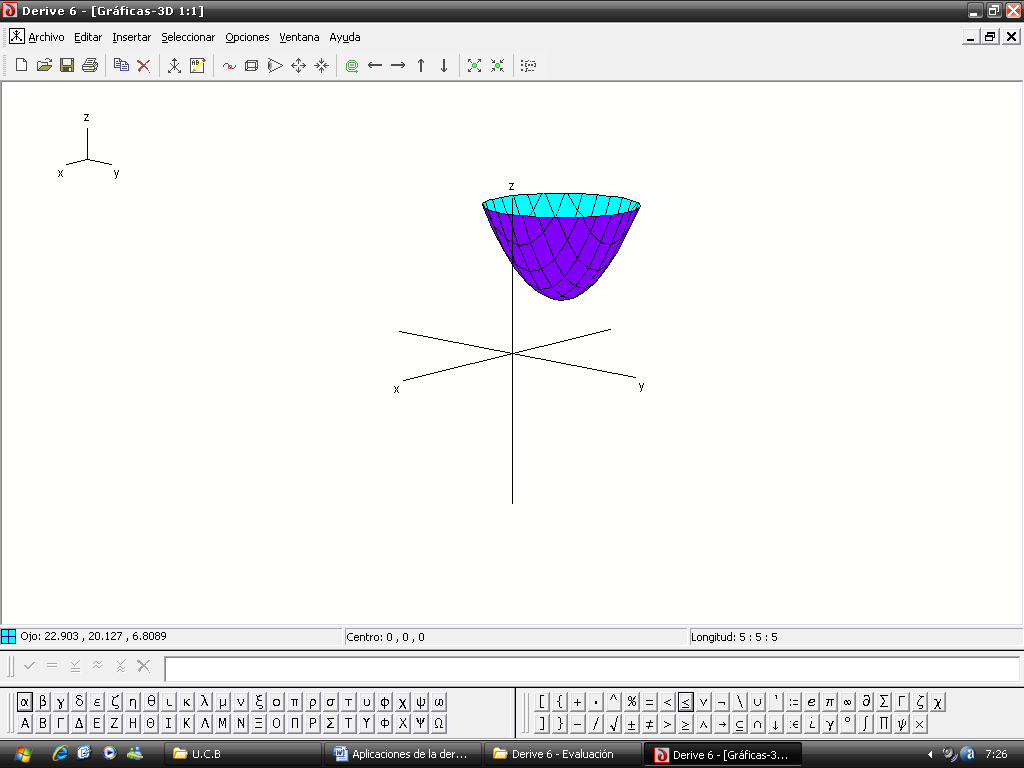
****

**Criterio de la Segunda Derivada.-**

Sea la función  cuyo punto critico es  es posible clasificar utilizando las derivadas parciales de segundo orden en puntos máximos, mínimos, punto en silla.

Para clasificar el punto. Entonces utilizaremos en las derivadas parciales de segundo orden la siguiente nomenclatura:

**Punto Mínimo Relativo**



P(a,b) 

Y=b 

x=a 

Z=f(a,b) 

Z=f(x,y) 

Se dice que el punto  es considerado mínimo relativo si cumple con la siguiente condición:

- y

**Punto Máximo Relativo**

x =a

y =b

Y

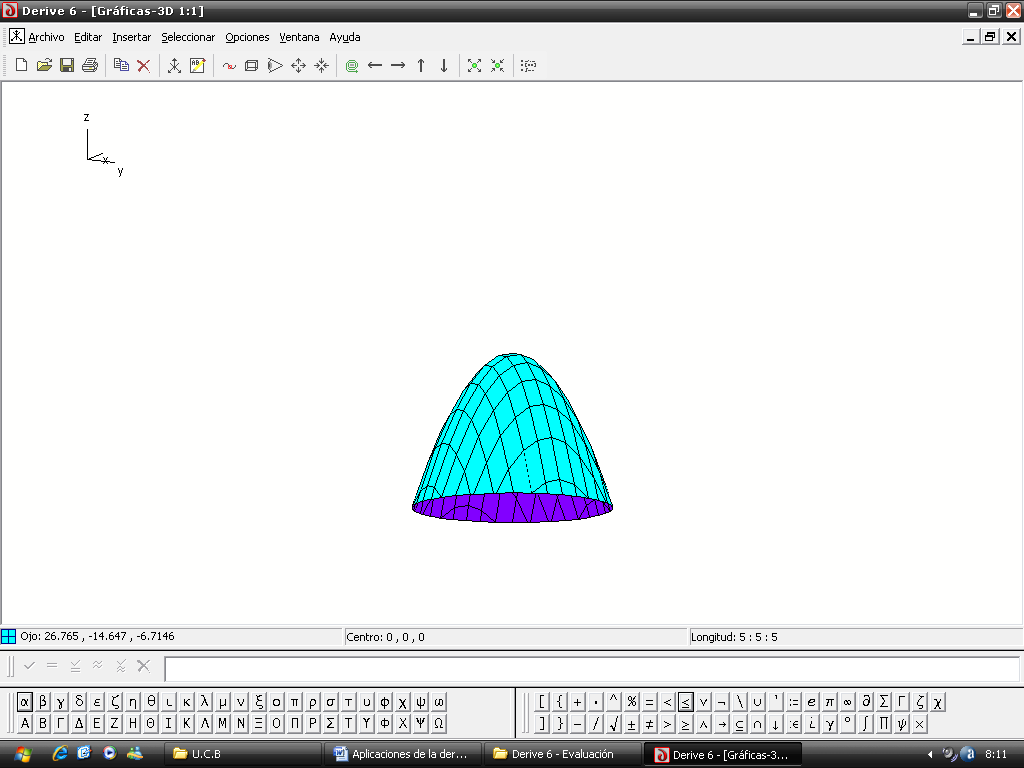
Z

X

Z= f(a,b)

P(a,b)

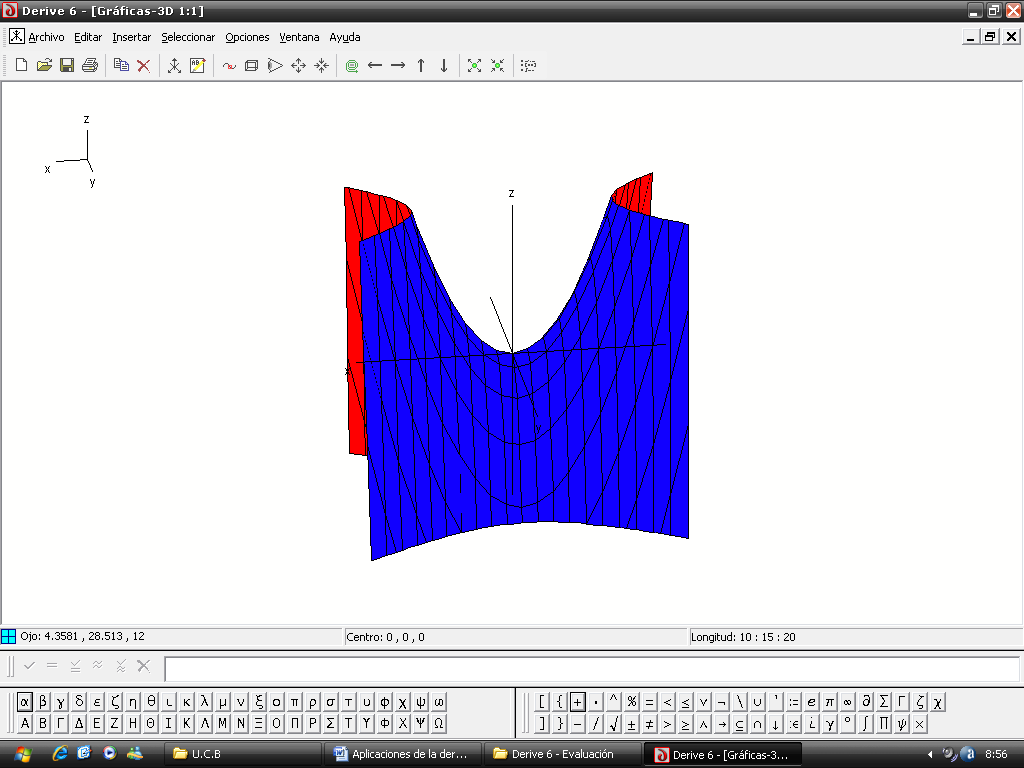
Z = f(x,y)

****

Se dice que el punto  es considerado máximo relativo si cumple con la siguiente condición:

- y

**Punto de Silla**

****

P(a,b)

Z=f(x,y)

Se dice que el punto  es considerado Punto de Silla si cumple con la siguiente condición:

-

**Resumen:**

Si : -

Maximo : y

Minimo : y

Punto de Silla D>

**Ejemplo 1:**

Para la siguiente función determinar los puntos críticos y clasificar de acuerdo al criterio de la segunda derivada.

**1.- Determinar las derivadas parciales**

;

**2.- Las derivadas Parciales igualar a cero y Hallar lo P.C**

1

**// 4**

2

3

**3 reemplazar en 2**

**X reemplazando en 3**

**3.- Escribir los puntos críticos**

**4.- Determinar las derivadas parciales de segundo orden**

**5.-. Clasificar los puntos críticos**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **PUNTO** | **A** | **B** | **C** | **D** | **CONCLUSION** | **P12(X,Y,Z)** |
| **(0,0)** | **0** | **0** | **-4** | **-16** | **Punto de silla** | **(0,0,1)** |
| **(1,1)** | **12** | **12** | **-4** | **128** | **Punto minimo** | **(1,1,-1)** |
| **(-1,-1)** | **12** | **12** | **-4** | **128** | **Punto minimo** | **(-1,-1,-1)** |

**Ejemplo 2**

*Determinar las derivas parciales e igualar a cero y resolver los sistemas para hallar puntos críticos*

*1*

*2*

*3*

*Reemplazar 3 en 1*

*+4=0*

***Escribir los puntos críticos***

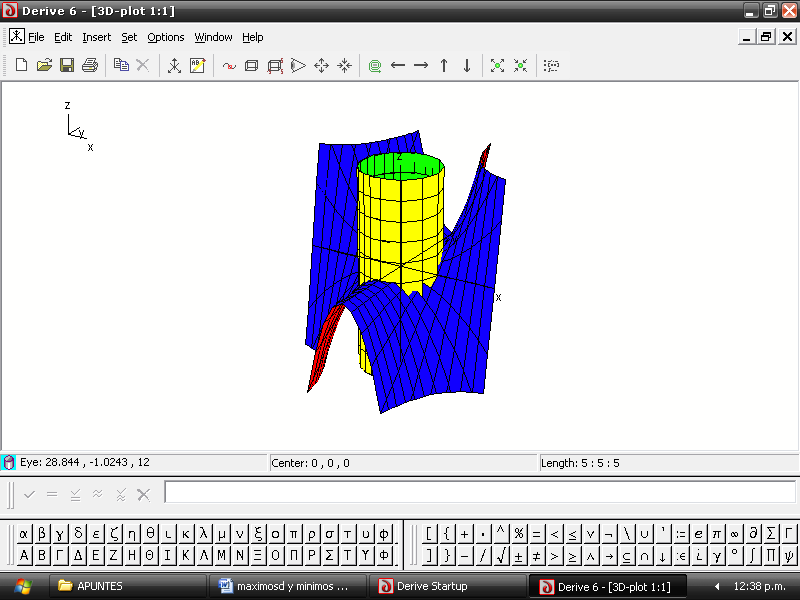
*P1*

*P3*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Puntos* | *A* | *B* | *C* | *D* | *Conclusión* |  |
|  | *-12* | *-12* | *-6* | *108* | *Máximo* |  |
|  | *12* | *12* | *6* | *108* | *Mínimo* |  |
|  | *-6* | *-6* | *-12* | *-108* | *Punto silla* |  |
|  | *6* | *6* | *12* | *-108* | *Punto silla* |  |

**Máximos y Mínimos con Restricción.**

Sea la función continua en un dominio que esta restringido (acondicionada) a otra función entonces para determinar los máximos y mínimos de una función se debe transformar en una sola función utilizando los multiplicadores de LaGrange 



Z= f(x ,y )

g(x ,y ) = K



 La nueva función

Función principal

 Función condición

 Multiplicador de LaGrange

**Ejemplo 1**

Se desea construir un silo de la forma de un cilindro con un cono superpuesto si el radio del cilindro es de 5 y el área total de la superficie es 1000 hallar la altura H del cilindro y la altura h del cono de manera que el volumen sea máximo.

**1.- Esquema y datos**

**h**

Área total de la Superficie es 1000

Area del Cono sin Base =

**H**

Area del Cilindro sin Tapa =

**2.- Identificar la función principal y la función condición.**

* **Función.**

* + - * **Condición**

**3.- Determinar los valores de h, H.**

1

2

3

**Despejando e igualando reemplazando h en 3**

**4.- Conclusión**

**Para que el Volumen sea máximo las medidas deben ser**

**EJEMPLO 2**

Un recipiente se construye con un cilindro circular recto de radio 5 m y con dos tapas cónicas en los extremos. Si el volumen 1000 m3. Hallar la altura H del cilindro y la altura h del cono de manera que el área sea mínimo.

**1.- Esquema y datos**

**h**

**Area del Cono sin Base =**

**H**

**Area del Cilindro sin Tapas =**

**h**

**2.- Identificar la función principal y la función condición.**

* **Función.**

* **Condición**

**3.- Determinar los valores de h, H.**

1

2

3

**Despejando e igualando reemplazando h en 3**

**4.- Conclusión**

**Para que el área sea minimo las medidas deben ser: del cilindro**  **la de los conos será de**

**EJEMPLO 3**

De acuerdo con los reglamentos postales, el perímetro mas largo de los paquetes enviados por correo de cuarta clases no puede exceder de 72 pulgadas. ¿Cuál es el mayor volumen posible de un paquete rectangular con dos lados cuadrados que puede ser enviado por correo de cuarta clase?

**1.- Esquema y datos**

**x**

**y**

**x**

**2.- Identificar la función principal y la función condición.**

* **Función.**

* **Condición**

**3.- Determinar los valores de x, y**

1

2

3

**Despejando e igualando 4 reemplazando en 3**

4

**En 4**

**4.- Conclusión**

El volumen mayor del paquete es de 3456 pulg 3.

**EJEMPLO 4**

Use el hecho de que doce onzas liquidas son (aproximadamente pulgadas cúbicas) para hallar la dimensión de la lata de cerveza de 12 onzas que puede ser construida usando la menor cantidad de metal.

**1.- Esquema y datos**

**r**

El volumen es de 6.89

**h**

Area Menor =

**2.- Identificar la función principal y la función condición.**

* **Función.**

* **Condición**

**3.- Determinar los valores de h, r.**

1

2

3

**Despejando e igualando reemplazando 4 en 3**

4

**4.- Conclusión**

Las dimensiones deben ser para el Radio y para la altura para que se gaste lo mínimo en material.

**EJEMPLO 5**

Un envase cilíndrico contendrá pulgadas cúbicas de jugo de naranja helado. El costo por pulgada cuadrada del metal para la elaboración de la tapa y de la base equivale a dos veces el costo por pulgada cuadrada del cartón para la parte lateral.

1. ¿Cuáles son las dimensiones del envase menos costoso?
2. ¿Cuántos cm2 de cartón y de metal serán necesarios?

**1.- Esquema y datos**

Tapa de metal

**r**

Superficie lateral

**h**

Base de metal

El volumen es de 6

**2.- Identificar la función principal y la función condición.**

**a).**

* **Función.**

* **Condición**

**3.- Determinar los valores de h, r.**

1

2

3

**Despejando e igualando reemplazando 4 en 3**

4

**b).**

**4.- Conclusión**

**a). l**as dimensiones del envase son y para que el costo sea mínimo.

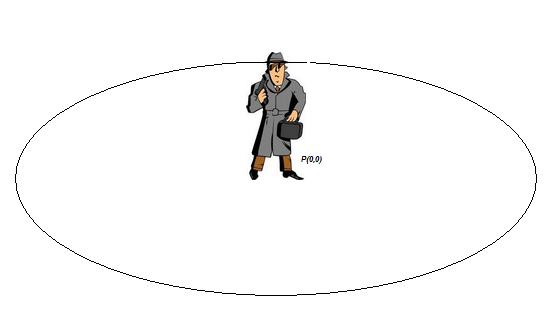
**b).** Sera necesario de cartón y en metal.

Ejemplo 6

Habiéndose deshecho de los pistoleros de la Policía el espía va en busca del líder de ellos. Entra a un cuarto y la puerta se cierra de pronto tras él. De inmediato empieza a sentir calor y, demasiado tarde, se entera que está atrapado dentro de la temida sala del asadero de Policia. Buscando desesperadamente un modo de salvarse, observa que el cuarto tiene la forma del círculo y que él está de pie en el centro (0,0). Presiona el botón de su reloj de pulsera para detectar calor y ve que en cada punto la temperatura en cada punto (x, y) del cuarto está dada por:

Del reporte de un informante, el sabe que en algún lugar en las paredes de ese cuarto hay una trampa que lleva a las afueras del castillo, y piensa que debe estar situada en el punto más fresco. ¿En dónde está? ¿Qué tan fresco estará el espía cuando llegue allí?

* 1er paso: DATOS Y ESQUEMA



Forma del cuarto:

Temperatura en cada punto (x,y) del cuarto:

* 2do paso: IDENTIFICAR LAS FUNCIONES

Función principal:

Función condición:

* 3er paso: APLICAR LOS MULTIPLICADORES DE LaGrange, DERIVAR Y DETERMINAR LOS VALORES

Despejando “λ” >>>

Despejando “λ” >>>

**Igualando 1 y 2**

**Reemplazando “x” en 3**

**Hallando “x”**

***Punto más frio (-2.44, -7.34)***

* 4to paso: CONCLUSIÓN

Para que el espía pueda escapar del asadero tiene que buscar el punto

P (2.44,-7.43) que es el punto más frio de la sala y lleva a las afueras del castillo, cuando llegue a ese punto, la temperatura del espía habrá bajado 62 unidades de temperatura, es decir de 130 a 67.47444

**Ejemplo7**

Si se gastan x miles de dólares en mano de obra y se gastan y miles de dólares en equipo, la producción de cierta fabrica será Q( x,y) = 60x1/3 y2/3 unidades. Si se dispone de $ 120000, ¿Cuántos debe asignarse a mano de obra y cuanto a equipo para generar la máxima producción posible?

1º Paso.- Datos y esquema

 X= mano de obraY = $ equipos

PASO 2.- función condición y función principal

Función condición x +y = 120000 dólares

Función principal Q(x, y) =60x2/3y-2/3

3 Paso.- Aplicar multiplicadores para formar la función

F (x, y,) =60x2/3y-2/3 + (x +y – 120000)

4ᵒ Paso.- Aplicar derivadas parciales igualar a cero para determinar x, y

= 60. x-2/3 y2/3 + = 0 → 1

= 60. x1/3 y-1/3 + = 0 → 2

= x + y – 120000 = 0

Eliminando “” de 1 y 2

x-2/3 y2/3 = 2x1/3 y-1/3

x-2/3 – 1/3 = 2y-1/3 – 2/3

y= 2x

luego 4 en 3.-

X +2x – 120000 = 0

3x = 120000

X = 40000 $.

“x” en 4.-

y = 2. 40000

y = 80000 $.

Q(x, y) = 60. (40000)1/3. (80000)2/3

Q(x, y)2y = 3809762,525 (u).

Se debe asignar a mano de obra: 40000 $.

Se debe asignar al equipo: 80000 $.

La máxima producción es: 3809763 dolares

Ejemplo 8

La formula empírica para hallar el área de la superficie corporal de una persona es:

S(W,H) = 0.0072 W0.425 H0.725  Donde W (Kg) es el peso de la persona y H (cm) es su estatura. Suponga que por un corto tiempo, el peso de María se ajusta a medida que ella crece, de modo que W + H = 160. Con esta restricción, ¿Qué estatura y peso maximizan el área de la superficie corporal de María?

1 Paso.- Datos y esquema

 Altura (cm) = Peso (kg) =

2PASO .- función condición y función principal

Función condición

Función principal.

3 Paso.- Aplicar multiplicadores para formar la función

4 Paso.- Aplicar derivadas parciales igualar a cero para determinar w, H

Eliminando

* Conclusión: Maximizaran el área de la superficie corporal de María una estatura de 100.7 cm y un peso de 59.27 Kg

*Ejemplo 9*

*se debe construir en edificio rectangular con un material para el techo que cuesta 31 por pie cuadrado, otro material para los costados y la parte trasera que cuesta 27 por pie cuadrado, mientras que el revestimiento y el vidrio empleado en la construcción del frente cuestan 55 por pie cuadrado. Si el edificio debe tener un volumen de 16000 pie cubico ¿Qué dimensiones minimizan el costo total de construcción?*

***1ºPASO: Datos y esquema***

*V=16000*

*Techo=31$\**

*Costados=27$\**

*Parte trasera=27$\**

*Frente =55$\**

***2ºPASO: Identificar la función principal y la función condición***

*Función aumentada*

***3ºPASO: Determinar los valores de x.y.z***

*0……………….❶*

*…………………❷*

*…………………. ❸*

*……………….…………. ❹*

*. Igualando*

*. Igualando*

*.Reemplazó ❺ ❻en❹*

***4º PASO: Conclusión***

*Las dimensiones q minimizan el costo total :*

*Largo*

*Ancho*

*Profundidad*